

Dritte Ersatzarbeit

für die Stunde vom

4.9.2012

Zeitwert: Ca. eine Schulstunde plus Hausaufgabenzeit

Thema:

Lösbarkeit von Linearen Gleichungssysteme

Bitte ausfüllen:

Bearbeitungszeit: _____

Fehler _____

Fragen: _____

Bemerkung zu Beispielaufgaben und Verständlichkeit des Skripts:

Einleitung

Bisher haben wir die Matrixschreibweise eingeführt und die Einträge unter der Diagonalen

„genullt“. Dadurch entsteht ein Dreieckssystem wie im folgenden Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3|11 \\ 0 & 5 & 2|2 \\ 0 & 0 & 2|4 \end{pmatrix}$.

Das Verfahren nennen wir den Gauß'schen Algorithmus. Bei dem Gauß'schen Algorithmus sind folgende Rechenschritte erlaubt:

1. Multiplikation / Division einer Zeile.
2. Addition / Subtraktion einer Zeile zu einer anderen.
3. Vertauschung zweier Zeilen
4. Vertauschung zweier Spalten, wenn man beachtet, dass sich dabei auch die Werte für x,y und z vertauschen.

Im Folgenden untersuchen wir, wie sich eine Matrix verhält, wenn es keine bzw. unendlich viele Lösungen gibt. Rechne hierzu die folgenden beiden Gleichungssysteme aus:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 3 \\ 2 & -1 & 2 8 \\ 3 & 11 & -7 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 1 \\ 3 & 2 & -7 1 \\ 4 & -3 & 2 7 \end{pmatrix}$
...	...
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 3 \\ 0 & -5 & -4 2 \\ 0 & 5 & -4 -3 \end{pmatrix}$ Die beiden letzten Zeilen addiert, ergibt:	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 1 \\ 0 & 1 & -2 -1 \\ 0 & -5 & 10 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 3 \\ 0 & -5 & -4 2 \\ 0 & 0 & 0 -1 \end{pmatrix}$ Die letzte Zeile nenne man Widerspruchszeile. Sie ist nicht lösbar und damit ist das ganze LGS nicht lösbar. IL = { }	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 1 \\ 0 & 1 & -2 -1 \\ 0 & 0 & 0 0 \end{pmatrix}$ Hier wird die letzte Zeile als Nullzeile bezeichnet. wir haben dann 2 Gleichungen und 3 Unbekannte und somit unendlich viele Lösungen. Daher wählen wir, wie wir schon kennen, für eine Variable einen Wert aus und erhalten somit die anderen Variablen: IL = {c+1;2c-1;c; c ∈ IR}

Übungsaufgaben:

Löse die folgenden Gleichungssysteme aus dem Buch S. 19:

Übung 1

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 2x + 2y + 2z = 6 & \text{b) } 3x + 5y - 2z = 10 & \text{c) } 4x - 3y - 5z = 9 & \text{d) } 2x - y + 3z + 2t = 7 \\ 2x + y - z = 2 & 2x + 8y - 5z = 6 & 2x + 5y - 9z = 11 & x + 4z + 3t = 13 \\ 4x + 3y + z = 8 & 4x + 2y + z = 8 & 6x - 11y - z = 7 & x + 2y + 2z - t = 3 \\ & & & 2x - 3y + 5z + 6t = 17 \end{array}$$

Lösungen:

3. Lösbarkeitsuntersuchungen

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ a) } L = \{(-1+2c; 4-3c; c); c \in \mathbb{R}\} & \text{b) } L = \{ \} & \text{c) } L = \{(3+2c; 1+c; c); c \in \mathbb{R}\} \\ \text{d) } L = \{(-3+c; -1+c; 4-c); c \in \mathbb{R}\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2. \text{ a) } L = \{(2; 2)\}, \text{ eindeutig lösbar} & \text{b) } L = \{ \}, \text{ unlösbar} & \text{c) } L = \{(5; -2)\} \\ \text{d) } L = \{ \}, \text{ unlösbar} & \text{e) } L = \{(0; 5; -1)\} & \\ \text{f) } L = \{(-1+2,5c-1,5d; 5-8c+5d; c; d) \in \mathbb{R}\}, \text{ unendlich viele Lösungen} & & \\ \text{g) } L = \{ \}, \text{ unlösbar} & \text{h) } L = \{(2-1,5c-d; 4-3c-2d; c; d) \in \mathbb{R}\} & \\ \text{i) } L = \{(3+2c-d; c; d) \in \mathbb{R}\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3. \text{ a) } L = \{(\frac{1}{2}; 8; 2)\} & \text{b) } L = \{(2; 3; -1)\} & \text{c) } L = \{(1; 3; 3)\} \\ \text{d) } L = \{ \} & \text{e) } L = \{(-3c; -1-c; c); c \in \mathbb{R}\} & \text{f) } L = \{(6; 2; -3)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 4. \text{ a) } L = \{ \} & \text{b) } \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} x = 2 - \frac{1}{3}c \\ y = 2 + \frac{2}{3}c \\ z = c \end{array} & \text{d) } \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{array} \\ \text{e) } \begin{array}{l} x = 1 - \frac{4}{7}c \\ y = -1 + \frac{2}{7}c \\ z = c \end{array} & \text{f) } L = \{ \} & \text{g) } \begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3}c \\ y = 2 - \frac{1}{3}c \\ z = c \end{array} & \text{h) } \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{array} \\ \text{i) } x = -8, y = 4, z = 36 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 5. \text{ a) } \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ t = 3 \end{array} & \text{c) } L = \{ \} & \text{d) } \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} - \frac{15}{4}c \\ y = \frac{1}{2} + \frac{7}{4}c \\ z = 2 - 4c \\ t = c \end{array} \\ \text{e) } x = 10, y = 5, z = 20, t = 10 & & \text{f) } x = 0, y = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}c, z = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}c, t = c & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 6. \text{ a) } \text{eindeutig lösbar, } L = \{(2; -1; -2; 0)\} & & \\ \text{b) } \text{unendlich viele Lösungen, } L = \{(1-c; c; c); c \in \mathbb{R}\} & & \\ \text{c) } \text{unendlich viele Lösungen, } L = \{(c-2d; c-d; d; c); c, d \in \mathbb{R}\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 7. \text{ a) } L = \{(2; 2)\} & \text{b) } L = \{ \} & \text{c) } L = \{(5; 15; 2)\} \\ \text{d) } L = \{(1-c; -1; c); c \in \mathbb{R}\} & & \text{e) } L = \{ \} \\ \text{f) } L = \{(2+c; c; 2c-4); c \in \mathbb{R}\} & & \text{g) } L = \{(-1, 5-c; -0, 5; c); c \in \mathbb{R}\} \\ \text{h) } L = \{(-6c-6d; 5c+5d; c; d) \in \mathbb{R}\} & \text{i) } L = \{ \} & \end{array}$$

